DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979

Composition de Mathématiques

1re EPREUVE

Mardi 8 Mai 1979, de 8 heures à midi

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. On désigne par f une fonction continue sur [a, b] à valeurs réelles. On suppose que, en tout point v de]a, b[, la fonction f admet une dérivée seconde $f''(v)$. On pose $c = \frac{a+b}{2}$.

PREMIÈRE PARTIE

Soit Γ le graphe de f.

1° On désigne par T la tangente à Γ au point d'abscisse c.

a) Donner une équation de T sous la forme : $y = \tau(x)$.

b) Calculer l'intégrale : $\int_a^b \tau(x)\,dx$.

Dans la suite de la première partie, on suppose que, pour tout élément v *de*]a, b[, $f''(v) \geqslant 0$.

2° Etudier la variation de la fonction numérique ψ définie sur [a, b] par la relation :

$$\psi(x) = f(x) - \tau(x).$$

En déduire le signe de $\psi(x)$.

3° Soit D la droite joignant les points de Γ d'abscisses a et b.

a) Donner une équation de D sous la forme :

$$y = \delta(x).$$

b) Etudier la variation de la fonction numérique θ définie sur [a, b] par la relation :

$$\theta(x) = f(x) - \delta(x).$$

En déduire le signe de $\theta(x)$.

c) Calculer l'intégrale : $\int_a^b \delta(x)\,dx$.

4° Comparer deux à deux les nombres réels :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad J = (b-a)\,f(c) \qquad K = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

En déduire l'encadrement : $1 \leqslant \ln 3 \leqslant \frac{4}{3}$.

(Le symbole ln représente le logarithme népérien.)

.../...

DEUXIÈME PARTIE

1° Soient x un élément de [a, b] distinct de c et φ la fonction numérique définie sur [a, b] par la relation :

$$\varphi(t) = f(t) - f(c) - (t - c) f'(c) - \lambda (t - c)^2,$$

où λ est le nombre réel déterminé par la relation $\varphi(x) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ et à sa dérivée, montrer qu'il existe un élément v_0 de]a, b[tel que :

$$\lambda = \frac{1}{2} f''(v_0).$$

Retrouver ainsi le signe de $\psi(x)$, déjà étudié dans le 2° de la première partie.

2° On suppose qu'il existe un nombre réel positif M_2 tel que, pour tout élément v de]a, b[, $| f''(v) | \leqslant M_2$.

a) Montrer que, pour tout élément x de [a, b],

$$| f(x) - f(c) - (x - c) f'(c) | \leqslant \frac{M_2}{2} (x - c)^2.$$

b) En déduire que : $\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b - a) f(c) \right| \leqslant \frac{M_2}{24} (b - a)^3.$

Examiner le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.

TROISIÈME PARTIE

1° Calculer le nombre : $\int_a^b f(x)\, dx - (b - a) f(c) - \frac{(b - a)^2}{24} [f'(b) - f'(a)]$

lorsque : a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = x^3$.

Généraliser les résultats obtenus au cas où f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 3$.

Dans la suite du problème, on désigne par ω un nombre réel strictement positif et par g une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-\omega, \omega]$. On suppose que g est impaire, c'est-à-dire que, pour tout élément t de $[-\omega, \omega]$, $g(-t) = -g(t)$. On suppose en outre que g est cinq fois dérivable sur $[-\omega, \omega]$, et que sa dérivée cinquième $g^{(5)}$ est continue.

2° Soit u un élément de $[-\omega, \omega]$.

a) On considère les fonctions numériques α et β définies sur $[-\omega, \omega]$ par les relations :

$$\alpha(t) = \frac{1}{24} (u - t)^4,$$

$$\beta(t) = \alpha(t)\, g^{(4)}(t) - \alpha'(t)\, g'''(t) + \alpha''(t)\, g''(t) - \alpha'''(t)\, g'(t) + \alpha^{(4)}(t)\, g(t).$$

Calculer la dérivée de β. En déduire la relation :

$$g(u) = u g'(0) + \frac{u^3}{6} g'''(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u - t)^4\, g^{(5)}(t)\, dt.$$

b) Etablir de même la relation :

$$g''(u) = u g'''(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u - t)^2\, g^{(5)}(t)\, dt.$$

c) Soit N_5 un nombre réel positif tel que, pour tout élément t de $[-\omega, \omega]$, $| g^{(5)}(t) | \leqslant N_5$.

Montrer que : $| g(u) - u g'(0) - \frac{u^2}{6} g''(u) | \leqslant \frac{N_5}{24} \left| \int_0^u (u - t)^2 (u^2 + 2ut - t^2)\, dt \right|.$

Calculer l'intégrale : $\int_0^u (u - t)^2 (u^2 + 2ut - t^2)\, dt.$

3° On suppose que la fonction f est quatre fois dérivable sur [a, b] et que sa dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue. Soit M_4 un nombre réel positif tel que, pour tout élément x de [a, b], $| f^{(4)}(x) | \leqslant M_4$.

En posant $t = x - c$ et $g(u) = \int_{-u}^{u} f(t + c)\, dt$, déduire de la question précédente la majoration :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b - a) f(c) - \frac{(b - a)^2}{24} [f'(b) - f'(a)] \right| \leqslant \frac{7 M_4}{5\,760} (b - a)^5.$$

Retrouver ainsi les résultats du 1° de la troisième partie.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail